AUTOMORPHISMES D'ENTROPIE POSITIVE ET SURFACES RATIONNELLES

JULIE DÉSERTI AND JULIEN GRIVAUX

Soient X et Y des surfaces Kähleriennes compactes et f, g des transformations birationnelles de X et Y respectivement. On dit que f et g sont *birationnellement conjuguées* s'il existe une transformation birationnelle $h\colon X \dashrightarrow Y$ telle que $hfh^{-1} = g$. Si $||\,.\,||$ est une norme sur $H^{1,1}(X)$ et f^* est l'action de f sur $H^{1,1}(X)$ par pull-back, la croissance de la suite $(||(f^*)^n||)_{n>0}$ est invariante par conjugaison birationnelle et permet de comprendre géométriquement f dans beaucoup de cas :

Théorème 0.1 ([Di-Fa, Gi])**.** *Soient X une surface Kählerienne compacte et f une transformation birationnelle de X. Alors f est de l'un des types suivants, et l'assertion correspondante est vérifiée :*

(1) `Type borné:` *la suite $(||(f^*)^n||)_{n>0}$ est bornée. Alors f est birationnellement conjuguée à un automorphisme dont une itérée est dans la composante connexe de l'identité.*
(2) `Type linéaire:` *il existe $A > 0$ tel que $||(f^*)^n|| \sim An$. Alors f préserve une unique fibration rationnelle et n'est jamais birationnellement conjuguée à un automorphisme.*
(3) `Type quadratique:` *il existe $A > 0$ tel que $||(f^*)^n|| \sim An^2$. Alors f est birationnellement conjuguée à un automorphisme qui préserve une unique fibration elliptique.*
(4) `Type exponentiel:` *il existe $A, B > 0$ tels que $||(f^*)^n|| \sim Ae^{Bn}$.*

La suite $||(f^*)^n||^{1/n}$ est toujours convergente et sa limite est par définition le *premier degré dynamique de f*, noté $\lambda(f)$. Si f est de type borné, linéaire ou quadratique, $\lambda(f) = 1$ alors que $\lambda(f) > 1$ si f est de type exponentiel. Quand f est un automorphisme, des résultats généraux de Gromov et Yomdin ([Gro, Yo]) montrent que l'entropie topologique de f est le logarithme de son degré dynamique. Le théorème de Diller-Favre entraîne donc que les automorphismes d'entropie topologique strictement positive sont de type exponentiel. Ces automorphismes sont intéressants car leur dynamique est très riche ; Cantat a montré qu'ils existaient seulement sur des surfaces très particulières :

Théorème 0.2 ([Can1])**.** *Soient X une surface complexe compacte et f un automorphisme de X d'entropie topologique strictement positive. Alors X appartient à l'un des trois types de surfaces suivants* :
- *tores complexes ;*
- *surfaces K3 et surfaces d'Enriques ;*
- *surfaces rationnelles.*

La dynamique des biholomorphismes d'une surface $K3$ a été étudiée par Cantat et McMullen [Can2, McM2]. En revanche, les automorphismes de surfaces rationnelles demeurent très mal compris. Les premiers résultats sur ce sujet remontent à Nagata à la fin des années 50. Si X est une surface rationnelle munie d'un automorphisme f dont l'action sur $\mathrm{Pic}(X)$ est d'ordre infini, il existe un morphisme surjectif $\pi\colon X \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (*voir* [Na1]). On peut alors décomposer π en une suite d'éclatements, ce qui signifie que X est obtenue en éclatant $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en N points, et on a nécessairement $N \geq 10$. Soient $(E_i)_{1\leq i\leq N}$ les pull-back des diviseurs exceptionnels de chaque éclatement et H le diviseur hyperplan dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. La base $\{\pi^*H, E_1, \ldots, E_N\}$ identifie $\mathrm{Pic}(X)$ avec le réseau $\mathbb{Z}^{1,N}$ muni de la forme d'intersection diagonale $(1, -1, \ldots, -1)$. Le groupe de Weyl associé W_N est un sous-groupe de $\mathrm{Pic}(X)$ indépendant du morphisme π et tout automorphisme de X agit par un élément de W_N (*voir* [Na2, Do]). On ne sait pas en général si tout élément de W_N est représentable par un automorphisme d'une surface rationnelle pour $N \geq 10$. Le résultat suivant de McMullen donne cependant une réponse dans certains cas :

Théorème 0.3 ([McM1])**.** *Soit w un élément du groupe de Weyl W_N, de rayon spectral strictement supérieur à un et n'admettant pas de racine périodique. Alors w est réalisé par un automorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ éclaté en N points distincts, tous situés sur une même cubique.*

Les automorphismes de McMullen ont été explicitement construits de manière indépendante par Bedford et Kim [Be-Ki1], ils sont obtenus à partir de transformations birationnelles quadratiques de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ du type $A\sigma$ où σ est l'involution de Cremona et A est une matrice de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$. Si X est une surface rationnelle admettant un automorphisme dont l'action sur $\mathrm{Pic}(X)$ est d'ordre infini, il n'existe pas de champ holomorphe non nul sur X (*voir* [Ha]). Il n'existe donc pas de famille continue d'automorphismes d'entropie topologique strictement positive sur une surface rationnelle *fixée*, mais il est intéressant de se demander si de tels automorphismes peuvent se propager dans des familles de variétés complexes. Bedford et Kim ont récemment construit des automorphismes sur des familles de dimension arbitrairement grande en s'appuyant sur les travaux de physiciens [Hi-Vi1, Hi-Vi2, Tak1, Tak2, Tak3] :

Théorème 0.4 ([Be-Ki2])**.** *Soient n et k deux entiers avec $n > 2$ et k pair. Il existe alors une famille de surfaces rationnelles de dimension complexe $\frac{k}{2} - 1$ munie d'une famille d'automorphismes dont l'entropie topologique est la plus grande racine du polynôme $1 - k\sum_{\ell=1}^{n-1} x^\ell + x^n$. Ces surfaces rationnelles sont obtenues en éclatant $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en n points infiniment proches, chacun de multiplicité $2k + 1$.*

Nous avons entamé depuis l'année dernière un projet de recherche ayant pour but une meilleure compréhension des automorphismes de surfaces rationnelles, et plus particulièrement ceux d'entropie topologique strictement positive. Dans [De-Gr] nous avons développé une méthode de construction systématique d'automorphismes de surfaces rationnelles. Cette méthode permer en pratique de construire pour toute transformation birationnelle f du plan projectif complexe des automorphismes A de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tels que Af se relève en un automorphisme après avoir éclaté $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ un nombre fini de fois (avec éventuellement des éclatements multiples). Nous avons ainsi produit de nouveaux exemples d'automorphismes dans deux cas suivants bien distincts :

- $f = \Phi_n$ où pour tout $n \geq 2$, $\Phi_n(x\colon y\colon z) = (xz^{n-1} + y^n : yz^{n-1} : z^n)$. Les transformations que nous obtenons sont souvent proches et coïncident même parfois avec des transformations considérées dans [Be-Ki2], mais certains de nos exemples (en particulier ceux sans droite invariante) sont complètement nouveaux.
- $f(x\colon y\colon z) = \big(y^2z : x(xz+y^2) : y(xz+y^2)\big)$. Les exemples produits dans ce cas sont différents de tous ceux précédemment construits car ils contractent une conique et une droite.

Il apparaît donc que la classification (en termes de suites d'éclatements) des surfaces rationnelles basiques admettant des automorphismes est a priori délicate, de multiples situations géométriques pouvant se produire. C'est une des principales raisons pour laquelle nous avons étudié dans [De-Gr] les familles d'automorphismes. Si $\mathfrak{X} = (X_t)_{t\in B}$ est une famille holomorphe de surfaces rationnelles, la théorie des déformations permet d'associer à $\mathfrak{X}$ un nombre de paramètres génériques $\mathrm{m}(\mathfrak{X})$ compris entre 0 et $\dim B$ qui mesure la variation de la structure complexe de la fibre générique de $\mathfrak{X}$. Soit f une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ se relevant en un automorphisme minimal d'une surface rationnelle X sans champ holomorphe. Introduisons la terminologie suivante :

- (X, f) est de type `I` si toute déformation $\mathfrak{X}$ de X sur laquelle f s'étend satisfait $\mathrm{m}(\mathfrak{X}) = 0$;
- (X, f) est de type `I'` si toute déformation $\mathfrak{X}$ de X sur laquelle f s'étend linéairement (*i.e.* pour tout t de l'espace des paramètres de la déformation $\mathfrak{X}$, $f_t = A_t f$ pour une matrice A_t de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$) satisfait $\mathrm{m}(\mathfrak{X}) = 0$;
- (X, f) est de type `II` si elle n'est pas de type `I`;
- (X, f) est de type `II'` si elle n'est pas de type `I'`.

La construction de [Be-Ki2] permet d'exhiber des exemples de type `II'` (et donc de type `II`). D'autre part nous avons conjecturé dans [De-Gr] que les éléments du type $(X, A\Phi_n)$ pour $n \geq 3$ et A dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ étaient de type $\mathtt{I}'$ si $\lambda(A\Phi_n) > 1$. La suite de notre projet consiste en les points suivants :

- Trouver une méthode explicite pour prouver qu'un couple (X, f) est de type `I` ou $\mathtt{I}'$.
- Étudier les éventuelles conditions géométriques sur les suites d'éclatements que peuvent imposer les conditions `II` et `II'`.
- Dans le cas des surfaces rationnelles de type `II`, trouver une borne majorante pour $\mathrm{m}(\mathfrak{X})$, où $\mathfrak{X}$ parcourt les déformations de X sur lesquelles f s'étend ; et caractériser si possible les couples (X, f) pour lesquels cette borne est atteinte.

Nous disposons d'une stratégie pour attaquer ces problèmes. En effet, si f est un automorphisme d'une surface rationnelle X qui se propage à une déformation $\mathfrak{X}$, alors l'application de Kodaira-Spencer en la fibre centrale commute à l'action f^* de f sur $\mathrm{H}^1(X, TX)$: cela signifie que l'image de $\mathrm{KS}(\mathfrak{X})$ est fixée par cette action. En particulier, $\mathrm{m}(\mathfrak{X}) \leq \dim\ker(f^* - \mathrm{id})$, inégalité qui permet d'une part de majorer $\mathrm{m}(\mathfrak{X})$ et d'autre part de montrer que $\mathfrak{X}$ est de type `I` si 1 n'est pas valeur propre de f^*.

Il est donc nécessaire pour mener à bien cette approche d'étudier pour toute surface rationnelle basique X la représentation naturelle $\rho_X \colon \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{H}^1(X, TX)$. Le calcul de ρ_X dans des exemples concrets est a priori non dénué d'intérêt : on peut espérer que l'élément $\rho_X(f)$ de $\mathrm{End}(\mathrm{H}^1(X, TX))$ soit plus fin que l'élément f^* de $\mathrm{End}(\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}))$ et permette de détecter d'autres informations géométriques du système dynamique (X, f). La poursuite des techniques développées dans [De-Gr], et plus particulièrement l'utilisation des espaces de configuration de Fulton-McPherson paramétrant les surfaces rationnelles basiques, devraient permettre de calculer la représentation ρ explicitement pour les exemples existants. Nous espérons ainsi montrer par cette méthode que les automorphismes de surfaces rationnelles sont le plus souvent de type `I`, sauf dans des configurations géométriques très dégénérées.

Références

[Be-Ki1] E. Bedford, K. Kim, Periodicities in linear fractional recurrences : degree growth of birational surface maps, Michigan Math. J., *54*, (2006), 647–670.

[Be-Ki2] E. Bedford, K. Kim, Continuous families of rational surface automorphisms with positive entropy, Math. Ann. (3), *348*, (2010), 667–688.

[Can1] S. Cantat, Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes, C. R. A. S. Paris Série I Math., *328*, (1999), 901-906.

[Can2] S. Cantat, Dynamique des automorphismes des surfaces K3, Acta Math., *187 (1)*, (2001), 1-57.

[Ce-De] D. Cerveau, J. Déserti, Transformations birationnelles de petit degré, `arXivmath/0811.2325`.

[De-Gr] J. Déserti, J. Grivaux Automorphisms of rational surfaces with positive topological entropy, `arXiv1004.0656`, à paraître dans Indiana Univ. Math. J.

[Di-Fa] J. Diller, C. Favre, Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces, Amer. J. Math., *123*, (2001), 1135–1169.

[Do] I. Dolgachev, Reflection groups in algebraic geometry, Bull. Amer. Math. Soc., *45*, (2008), 1–60.

[Gi] M. Gizatullin, Rational G-surfaces (1), *44*, (1980), 110–144, 239.

[Gro] M. Gromov, On the entropy of holomorphic maps, Enseign. Math. (2), *49*, (2003), 217–235.

[Ha] B. Harbourne, Rational surfaces with infinite automorphism group and no antipluricanonical curve, Proc. Amer. Math. Soc., (3), *99*, (1987), 409–414.

[Hi-Vi1] J. Hietarinta, C. Viallet, Singularity confinement and degree growth. Side III–symmetries and integrability of difference equations (Sabaudia 1998), CRM Proc. Lecture Notes *25*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2000), 209–216.

[Hi-Vi2] J. Hietarinta, C. Viallet, Discrete Painlevé I and singularity confinement in projective space. Integrability and chaos in discrete systems (Brussels 1997), Chaos, Solitons and Fractals, *11 1-3*, (2000), 29–32.

[McM2] C. McMullen, Dynamics of K3 surfaces : Salem numbers and Siegel disks , J. Reine Angew. Math., *545*, (2002), 49–89.

[McM1] C. McMullen, Dynamics on blowups of the projective plane, Pub. Sci. IHES, *105*, (2007), 49–89.

[Na1] M. Nagata, On rational surfaces I, Mem. Coll. Sci. Kyoto (A), *33*, (1960), 352–370.

[Na2] M. Nagata, On rational surfaces II, Mem. Coll. Sci. Kyoto (A), *33*, (1960), 271–293.

[Tak1] T. Takenawa, A geometric approach to singular confinement and algebraic entropy, J. Phys. A : Math. Gen., *34*, (2001), L95–L102.

[Tak2] T. Takenawa, Discrete dynamical systems associated with root systems of indefinite type, Commun. Math. Phys., *224*, (2001), 657–681.

[Tak3] T. Takenawa, Algebraic entropy and the space of initial values for dicrete dynamical systems, J. Phys. A : Math. Gen., *34*, (2001), 10533–10545.

[Yo] Y. Yomdin, Volume growth and entropy, Israel J. Math., *57*, (1987), 285–300.