Généralités sur les VADI

VADI = variété algébrique de dimension infinie.

L'étude de la variété des automorphismes polynomiaux de l'espace affine $\mathbb{A}^N$ a été vivement encouragée par Shafarevich dans ses articles sur les groupes algébriques de dimension infinie (cf. [5, 6, 7]). Cette problématique est intimement liée à la conjecture Jacobienne, comme le montrent Bass, Connell et Wright dans le célèbre *survey* qu'ils consacrent à cette dernière (cf. [1]).

In [5], §3, Shafarevich asks: "Can one introduce a universal structure of an infinitedimensional group in the group of all automorphisms (resp. all birational automorphisms) of arbitrary algebraic variety?

In an open problem session holding at the international congress of Moscow (see [2]), Mumford suggests: "Let $G = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(x_0, x_1)$ be the Cremona group $(\ldots)$. The problem is to topologize G and associate to it a Lie algebra consisting, roughly, of those meromorphic vector fields D on $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ which "integrate" into an anlytic family of Cremona transformations".

Le problème des articles de Sahfarevich, outre leur manque de rigueur, est qu'ils omettent d'établir le caractère universel des objets construits. Cela n'a pas été fait non plus dans les articles de Kambayashi cités ci-dessous. Même si ce caractère universel n'est pas difficile à établir, il exige tout de même de poser le problème de manière précise. Plus précisément, il faut montrer qu'un certain foncteur (le foncteur des automorphismes ! cf. ci-dessous) est représentable, ce qui sous-entend d'avoir à sa disposition la bonne catégorie ! Kambayashi a commencé à définir de telles catégories dans les articles [3, 4] et il ne reste alors plus qu'à les utiliser (au besoin en les augmentant un peu) pour obtenir des objets universels (cf. [E'] et [C']).

Projet de recherche

Idée principale : Soit $N \geq 2$ un entier. Le foncteur $S \mapsto \mathrm{Aut}_S(\mathbb{A}^N)$ n'est pas représentable dans la catégorie des variétés algébriques ni même dans celle des schémas (en gros, il y a trop d'automorphismes). Par contre, il le devient dans la catégorie élargie des schémas ind-affines (cf. [4] pour la définition d'un schéma ind-affine)(la représentabilté du foncteur est établie dans l'article en préparation [E']). Le problème est identique pour le N-ème groupe de Crémmona et l'on obtient là encore, mais de manière moins triviale, la représentabilité du foncteur dans la catégorie des ind-schémas (un ind-schéma étant obtenu par recollement de schémas ind-affines)(cf. [C']).

L'intérêt d'introduire les variétés algébriques de dimension infinie est évident. L'existence d'objets universels (expliquée précédemment), outre son intérêt théorique, permet de faire de la géométrie sur l'ensemble des automorphismes polynomiaux (ou transformations birationnelles) de $\mathbb{A}^N$. Les questions se déclinent alors à l'infini (c'est le cas de le dire) et voici en vrac quelques axes de recherche:

- Développer les bases de la théorie des variété algébriques de dimension infinie. C'est un vaste programme et pour le moment, il n'existe que des embryons dans les articles de Kambayashi (cf. [3, 4]). Par exemple, peut-on définir ce qu'est un point lisse sur une variété algébrique de dimension infinie ?

- Montrer que les automorphismes modérés sont fermés dans l'ensemble de tous les automorphismes en dimension 3 (cf. ci-dessous le résumé de [D']).

- cf ci-dessous le résumé de [B'].

- l'article [E] contient plusieurs questions (cf. [E, questions 6 et 16]). Désignons par $\mathcal{G}$ le groupe des automorphismes polynomiaux du plan affine complexe, par $\mathcal{LF}$ le sous-ensemble des automorphismes localement finis (i.e. annulés par un polynôme non nul) et par $\mathcal{S}$ le sous-ensemble des automorphismes admettant un unique point fixe (en comptant la multiplicité). Il est facile de voir que $\mathcal{S}$ est ouvert dans $\mathcal{LF}$ qui est lui-même fermé dans $\mathcal{G}$, ce qui permet de munir $\mathcal{S}$ et $\mathcal{LF}$ de structures de variétés algébriques de dimension infinie. De plus, un automorphisme f est locament fini si et seulement s'il est triangularisable, i.e. conjugué à un automorphisme triangulaire $(aX + p(Y), bY + c)$, $a, b, c \in \mathbb{C}$. On peut alors définir les pseudo-valeurs propres de f comme étant les nombres a et b et sa trace par $\mathrm{Tr}\, f = a + b$. Les questions suivantes sont naturelles: 1) l'application trace $\mathcal{LF} \to \mathbb{A}^1$ est-elle un morphisme ? 2) l'application naturelle $\mathcal{S} \to \mathbb{A}^2$ associant à $f \in \mathcal{S}$ son unique point fixe est-elle un morphisme ?

Résumés d'articles

Dans l'article [A], j'énonce une conjecture décrivant les composantes irréductibles de la variété des automorphismes du plan de degré $\leq n$ et je montre qu'elle est réductible dès que $n \geq 4$, répondant ainsi à une remarque du *survey* précédemment cité.

Dans l'article [B], je montre que l'application qui, à un automorphisme du plan associe sa longueur, est semicontinue inférieurement (la longueur d'un automorphisme étant le nombre minimum d'automorphismes triangulaires nécessaires pour l'écrire comme produit d'automorphismes affines et triangulaires).

Dans l'article [C], avec E. Edo, nous exhibons un phénomène de dégénérescence assez surprenant en longueur 3 : nous donnons une famille d'automorphismes du plan de longueur générique 3 qui dégénère en un automorphisme de longueur 1 de degré étonnament grand.

Dans l'article [D], j'étudie la stratification par le multidegré de la variété $\mathcal{G}$ des automorphismes du plan (le multidegré d'un automorphisme étant la suite finie des degrés des automorphismes triangulaires qui apparaissent dans une écriture réduite de l'automorphisme comme produit d'automorphismes affines et triangulaires). Je montre que l'ensemble $\mathcal{G}_d$ des automorphismes de multidegré d fixé est un sous-ensemble localement fermé et lisse de $\mathcal{G}$. Si $d = (d_1, \ldots, d_k)$, je montre également que cet ensemble est fermé dans l'ensemble des automorphismes de degré $d_1 \times \cdots \times d_k$.

Dans l'article [E], avec S. Maubach, nous montrons qu'un automorphisme du plan est semisimple (i.e. annulé par un polynçome à racines simples) si et seulement si sa classe de conjugaison est fermée. Il s'agit de la généralisation naturelle d'un résultat d'algèbre linéaire. La structure de variété algébrique du groupe des automorphismes est sous-jacente à notre énoncé. Notre preuve s'appuie sur quelques résultats topologiques comme le théorème du point fixe de Brouwer.

Dans l'article [F], je relie l'étude de la dégénérescence des automorphismes en longueur 2 à l'énoncé de rigidité suivant :

Conjecture de rigidité. Soient $m, n \geq 1$ des entiers et soient $a, b \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes de la forme $a = X(1 + a_1 X + \cdots + a_m X^m)$ et $b = X(1 + b_1 X + \cdots + b_n X^n)$. Écrivons le polynôme $a \circ b$ sous la forme $a \circ b = X(1 + c_1 X + \cdots + c_p X^p)$, où $p = (m+1)(n+1) - 1$. On a l'implication suivante :

$$(c_1 = \cdots = c_{m+n} = 0) \quad \Longrightarrow \quad (a_1 = \cdots = a_m = b_1 = \cdots = b_n = 0).$$

Cette conjecture équivaut à la suivante

Conjecture bis. Soit $P(z) = z(1-\lambda_1 z)\ldots(1-\lambda_m z) \in \mathbb{C}[z]$ ($\lambda_j \in \mathbb{C}$). Désignons par $P^{-1}(z) = z\left(1 + \sum_{n \geq 1} b_n z^n\right)$ l'inverse pour la composition au voisinage de l'origine. Si m coefficients consécutifs b_n sont nuls, alors les λ_j sont nuls.

Nous n'avons pu répondre (positivement) à cette question que pour $m = 1$ ou 2. Le cas général semble difficile bien qu'il y ait une multitude d'approches possibles. On peut par exemple montrer que les b_n satisfont une relation de récurrence linéaire (à coefficients non constants !) de longueur m. L'utilisation de techniques de combinatoire sophistiquées via les D-modules (à la Zeiberger) pourrait s'avérer déterminante. Quoi qu'il en soit, si la conjecture est satisfaite, nous donnons un ordre explicite $\preceq$ sur les multidegrés tel que pour tout multidegré d de longueur ≤ 2, l'on ait $\overline{\mathcal{G}}_d = \bigcup_{e \preceq d} \mathcal{G}_e$.

Résumés d'articles en préparation

Dans l'article [A'], j'explicite une méthode de construction d'automorphismes polynomiaux à partir de la donnée d'une représentation (cf. mon mémoire HDR, p. 27-29, http://mia.univ-larochelle.fr/content/view/68/89/lang,french/). Il se trouve que les automorphismes construits forment un groupe algébrique de dimension infinie.

Dans l'article [B'], avec C. Quitté, nous considérons le sous-ensemble $\mathcal{M}$ de $\mathcal{E} := \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]^N$ constitué des N-uplets $(p_1, \ldots, p_N)$ tels que l'idéal engendré par les p_j soit maximal. Notre but est de montrer que $\mathcal{M}$ est localement fermé dans $\mathcal{E}$ et que l'application naturelle $\mathcal{M} \to \mathbb{A}^N$ associant à un N-uplet son unique zéro est un morphisme (de variétés algébriques de dimension infinie). Même si la problématique est relativement élémentaire, elle est reliée à des résultats profonds tels que le théorème de Quillen-Suslin (alias le problème de Serre).

Dans l'article [C'], avec J. Blanc, nous donnons quelques exemples de groupes algébriques de dimension infinie. Nous montrons notamment que le N-ème groupe de Crémona (groupe des transfomations birationnelles de $\mathbb{A}^N$) est naturellement une variété algébrique de dimension infinie. Ce dernier résultat répond à une question de Shafarevich.

L'article [D'] est consacré à l'espace affine de dimension 3. Le résultat récent, célèbre et difficile de Shestakov et Umirbaev montre que les automorphismes ne sont alors pas tous modérés (i.e. composés d'automorphismes affines et triangulaires). J'établis que l'ensemble des automorphismes modérés fixant la dernière coordonnée est fermé dans le groupe de tous les automorphismes. Cela contredit déjà certains énoncés douteux énoncés par Shafarevich. Par contre, mon but serait de montrer que l'ensemble de tous les automorphismes modérés (i.e. ne fixant pas nécessairement la dernière coordonnée) est fermé. Outre le fait de contredire à nouveau Shafarevich (qui affirme au contraire la densité), ce résultat aurait le mérite de donner un statut encore plus intéressant au sous-groupe des automorphismes modérés...

Dans [E'], avec A. Dubouloz, en utilisant la théorie des ind-schémas affines initiée par Kambayashi, nous montrons que les automorphismes de $\mathbb{A}^N$ sont naturellement munis d'une telle structure. Cela précise doublement la construction de Shafarevich. En effet, d'une part la structure de ind-schéma est plus fine que la structure de variété et d'autre part nous montrons que l'objet construit est unique car il répond à un problème universel.

Articles publiés.

[A] On the variety of automorphisms of the affine plane, J. Algebra 195 (1997), 604-623.

[B] On the length of automorphisms of the affine plane, Math. Ann. 322 (2002), 401-411.

[C] Some families of polynomial automorphisms (avec E. Edo), Journal of Pure and Applied Algebra 194 (2004), 263-271.

[D] Plane polynomial automorphisms of fixed multidegree, Math. Ann. 343 (2009), 901-920.

[E] A characterization of semisimple plane polynomial automorphisms (avec S. Maubach), Journal of Pure and Applied Algebra 214 (2010), no 5, 574-583.

Article soumis.

[F] Polynomial composition rigidity and plane polynomial automorphisms, 18 pages, disponible à http://perso.univ-lr.fr/jpfurter/

Articles en préparation.

[A'] Polynomial automorphisms from representation theory (cf. mémoire HDR, p. 27, http://mia.univ-larochelle.fr/conte

[B'] A natural question related to maximal ideals of polynomial rings (avec C. Quitté).

[C'] Examples of infinite dimensional algebraic groups (avec J. Blanc).

[D'] About the closedness of tame automorphisms in automorphisms of dimension 3.

[E'] Automorphisms of the affine space as a natural ind-affine scheme (avec A. Dubouloz).

References

[1] H. Bass, E. Connell, D. Wright, The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse, Bull. of the A.M.S. 7 (1982), 287-330.

[2] F. E. Browder, editor. Mathematical developments arising from Hilbert problems. A.M.S., Providence, R.I., 1976.

[3] T. Kambayashi, Pro-affine algebras, ind-affine groups and the Jacobian problem. J. Algebra 185 (1996), no. 2, 481-501.

[4] T. Kambayashi, Some basic results on pro-affine algebras and ind-affine schemes, Osaka J. Math. 40 (2003), no. 3, 621-638.

[5] I. R. Shafarevich, On some infinite-dimensional groups, Rend. Mat. e Appl. (5) 25 (1966), no. 1-2, 208-212.

[6] I. R. Shafarevich, On some infinite-dimensional groups II, Math. USSR Izv., 18 (1982), 214-226.

[7] I. R. Shafarevich, Letter to the editors: "On some infinite-dimensional groups. II", (Russian) Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 59 (1995), no. 3, 224.